

中国林业科学研究院

2018 年硕士研究生入学考试

数理统计 (含概率论)

试题

注: 所有答案一律写在答题纸上, 写在试题纸上无效

一、填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 设两两相互独立的三事件 A , B 与 C 满足条件: $ABC = \phi$, $P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$, 且已知 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 则 $P(A) =$ _____。

2. 将一枚硬币重复抛 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数 = _____。

3. 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ($i=1,2$), 且满足 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 则

$P\{X_1 = X_2\} =$ _____。

4. 设一次实验成功的概率为 p , 进行 100 次重复试验, 当 $p=1/2$ 时, 成功次数的标准差的值最大, 其最大值为_____。

5. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ _____。

6. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记统计量 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则

$E(T) =$ _____。

7. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 0.5, 则根据切比雪夫不等式 $P\{|X - Y| \geq 6\} \leq$ _____。

8. 已知 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, 则 X 的分布函数 $F(x) =$ _____。

9. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值与样本方差, 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____。

10. 设总体 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{1}{\theta}$, $k = 1, 2, \dots, \theta$, 参数 θ 的矩估计量 = _____。

二、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 事件 A、B 为对立事件，则下列式子不成立的是

- (A) $P(AB)=0$ (B) $P(\overline{AB})=0$
 (C) $P(A\cup B)=1$ (D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

2. 若 $P(A)=\frac{1}{2}$ ， $P(B)=\frac{1}{2}$ ，则下列等式成立的是

- (A) $P(A\cup B)=1$ (B) $P(\overline{A}\overline{B})=\frac{1}{4}$
 (C) $P(AB)=\frac{1}{2}$ (D) $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

3. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则随 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$

- (A) 单调增大 (B) 单调减少
 (C) 保持不变 (D) 增减不定

4. 设随机变量 X 服从指数分布，则对随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数，下列结论正确的是

- (A) 是连续函数 (B) 至少有 2 个间断点
 (C) 是阶梯函数 (D) 恰有一个间断点

5. 设 $n_A \sim B(n, p)$ ($0 < p < 1$)，则当 n 很大时，下列选项不正确的是

- (A) $\frac{n_A}{n}$ 依概率收敛于 p (B) $n_A \sim N(np, np(1-p))$
 (C) $\frac{n_A - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$ (D) $\frac{n_A}{n} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$

6. 设 X, Y 是相互独立的两个随机变量，它们的分布函数为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ ，则 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数是

- (A) $F_Z(z) = \max\{F_X(z), F_Y(z)\}$ (B) $F_Z(z) = \max\{|F_X(z)|, |F_Y(z)|\}$
 (C) $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$ (D) 都不是

7. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量列，且均服从参数为 λ ($\lambda > 1$) 的指数分布，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则

$$\begin{array}{ll}
 \text{(A)} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x) & \text{(B)} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{\lambda n}} \leq x \right\} = \Phi(x) \\
 \text{(C)} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x) & \text{(D)} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x)
 \end{array}$$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从正态分布 $N(0,1)$, 则下列正确的是

$$\begin{array}{ll}
 \text{(A)} P\{X+Y \geq 0\} = \frac{1}{4} & \text{(B)} P\{X-Y \geq 0\} = \frac{1}{4} \\
 \text{(C)} P\{\max(X, Y) \geq 0\} = \frac{1}{4} & \text{(D)} P\{\min(X, Y) \geq 0\} = \frac{1}{4}
 \end{array}$$

9. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, 则总体均值 μ 的置信区间的长度 l 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是

$$\begin{array}{ll}
 \text{(A)} \text{当 } 1-\alpha \text{ 缩小时, } l \text{ 缩短} & \text{(B)} \text{当 } 1-\alpha \text{ 缩小时, } l \text{ 增大} \\
 \text{(C)} \text{当 } 1-\alpha \text{ 缩小时, } l \text{ 不变} & \text{(D)} \text{以上说法均错}
 \end{array}$$

10. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$, 则必有

$$\begin{array}{ll}
 \text{(A)} \sigma_1 < \sigma_2 & \text{(B)} \sigma_1 > \sigma_2 \\
 \text{(C)} \mu_1 < \mu_2 & \text{(D)} \mu_1 > \mu_2
 \end{array}$$

三、计算题 (90 分)

1. 已知三个事件 A, B, C 有相同的概率 p , 且两两独立但三个事情不能同时发生, 试确定 p 的最大可能值。(10 分)

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-kx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (k > 0)$$

试求:

- (1) 系数 A 。(5 分)
- (2) $F(x)$ 。(5 分)
- (3) $P(-1 < x < 1/k)$ 。(5 分)

3. 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x < 0, x \geq 2 \end{cases}$$

试求:

- (1) $E(X)$ 。(5 分)
- (2) $D(X)$ 。(5 分)
- (3) $P[|X - E(X)| \leq D(X)/2]$ 。(5 分)

4. 分别使用金球和铂球测定引力常数 (单位: $10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$), 得数据如下:

| | | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 用金球测定值 | 6.683 | 6.681 | 6.676 | 6.678 | 6.679 | 6.672 |
| 用铂金测定值 | 6.661 | 6.661 | 6.667 | 6.667 | 6.664 | |

设使用金球和铂球测定值总体分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ (已知

$$F_{0.975}(5, 4) = 1/7.39, \quad t_{0.025}(9) = 2.2622),$$

(1) 试求方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.95 的置信区间。(5 分)

(2) 设方差 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 试求两个测定值总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

(10 分)

5. 中国林科院某研究所在其实验基地的三个不同立地类型下进行了目标树经营，为了分析三个不同立地类型下目标树直径生长情况，各随机抽取 5 株目标树直径为研究对象，直径大小如下：

| 立地类型 A | 立地类型 B | 立地类型 C |
|--------|--------|--------|
| 40 | 26 | 39 |
| 48 | 34 | 40 |
| 38 | 30 | 43 |
| 42 | 28 | 50 |
| 45 | 32 | 50 |

试在显著性水平 0.05 下，检验三种立地类型下目标树的平均直径有无显著性的差异。若差异是显著，试求均值差 $\mu_A - \mu_B$ ， $\mu_A - \mu_C$ 及 $\mu_B - \mu_C$ 的置信度为 95% 的置信区间。设各立地类型下目标树的直径服从同方差的正态分布（ $F_{0.05}(2,12) = 3.89$ ， $t_{0.025}(12) = 2.1788$ ）。（15 分）

6. 为研究重量 x （单位：g）对弹簧长度 Y （单位：cm）的影响，对不同重量的 6 根弹簧进行测量，得到如下数据：

| | | | | | | |
|-------|------|------|------|-----|------|------|
| x_i | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| y_i | 7.25 | 8.12 | 8.95 | 9.9 | 10.9 | 11.8 |

(1) 试求弹簧长度 Y 关于重量 x 的线性回归方程。（5 分）

(2) 试求误差方差 σ^2 的无偏估计和样本相关系数 r 。（5 分）

(3) 利用 t 分布判断线性回归的显著性（ $\alpha = 0.01$ ， $t_{0.005}(4) = 4.6041$ ）。（5 分）

(4) 对 $x = 16$ 处的 Y 值作出区间预测（ $\alpha = 0.05$ ， $t_{0.025}(4) = 2.7764$ ）。（5 分）