中国科学院大学

2020 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：高等代数

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

说明：本卷共九题，前七道题必答，第八题、第九题只准选其一答之。

一．（20 分）若整系数多项式 $f(x)$ 有根 p/q，这里 p,q 是互素的整数，证明

1）$(q-p) \mid f(1),\ (q+p) \mid f(-1)$；

2）对任意整数 m 有 $(mq-p) \mid f(m)$。

二．（18 分）以 $\det(M)$ 记矩阵 M 的行列式，证明下列结论：

1）设 A,B 都是 n 阶实方阵，则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A+\sqrt{-1}B)\cdot\det(A-\sqrt{-1}B)$$

2）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，I_k 表示 k 阶单位矩阵。则

$$\lambda^n\cdot\det\left(\lambda I_m - AB\right) = \lambda^m\cdot\det\left(\lambda I_n - BA\right),\quad (\lambda\text{ 是复数})。$$

三．（18 分）已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = I_n$，问：秩$\left(I_n + A\right)$ + 秩$\left(I_n - A\right) = ?$ 并证明你的答案。

四．（18 分）设 A 是 n 阶实对称正定矩阵，B 是 n 阶实对称半正定矩阵，

1）证明：$\det(A+B)\ge\det(A)+\det(B)$；

2）当 $n\ge 2$ 时，问：在什么条件下有 $\det(A+B)>\det(A)+\det(B)$，并证明之。

五．（18 分）设 n 阶复方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。求 A 的伴随矩阵 A^* 的全部特征值。

六．（20 分）已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$

1）求正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ$为对角形矩阵；

2）求解矩阵方程$X^2=A$。

七．（18 分）设λ是非零复数，k为正整数，$J_n(\lambda)$表示特征值为λ的n阶若当块。

1）求$\left(J_n(\lambda)\right)^k$的若当标准形；

2）证明：$J_n(\lambda)$有k次方根，即存在n阶复方阵B使得$B^k=J_n(\lambda)$；

3）证明：任意n阶可逆复方阵A都有k次方根。

八．（20 分）n阶实方阵P称为正交矩阵，如果$PP^t=I_n$；n阶实方阵R称为反射矩阵，如果R正交相似于对角矩阵$\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$。证明：每个二阶正交矩阵都能写成反射矩阵的乘积。

九．（20 分）$\mathbb{R}[x]_n$表示实数域$\mathbb{R}$上所有次数小于$n(>1)$的多项式之集，它是实数域上n维线性空间。求导算子$\boldsymbol{D}$：

$$\boldsymbol{D}f(x)=f'(x),\quad \forall f(x)\in\mathbb{R}[x]_n$$

是$\mathbb{R}[x]_n$上的线性变换。

1）对于任意实数a，证明平移算子$\boldsymbol{S}_a$：

$$\boldsymbol{S}_a f(x)=f(x+a),\quad \forall f(x)\in\mathbb{R}[x]_n$$

是$\mathbb{R}[x]_n$上的线性变换，并且存在一个多项式$g(x)\in\mathbb{R}[x]_n$，使得$\boldsymbol{S}_a=g(\boldsymbol{D})$。

2）分别求出$\boldsymbol{S}_a,\boldsymbol{D}$在基$1, x, x^2/2!,\cdots, x^{n-1}/(n-1)!$ 下的矩阵。